Netzflächen mit Haupttangentenkurven 3. und 4. Ordnung

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der hohen philosophischen Fakultät der
Universität Basel

von

PAUL MOOR
aus Basel

BASEL 1924

Netzflächen mit Haupttangentenkurven 3. und 4. Ordnung

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der hohen philosophischen Fakultät der
Universität Basel

von

PAUL MOOR
aus Basel

BASEL 1924

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. H. Mohrmann und Dr. O. Spiess.

Basel, den 23. Februar 1924.

Prof. Dr. F. Zschokke,
Dekan.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhalt.

Seite

Einleitung 7

Erster Teil: Ansatz und Diskussion.

§ 1. Allgemeiner Ansatz 9

§ 2. Die Leitlinien der Netzflächen 11

§ 3. Die Study'schen Formeln 13

§ 4. Netzflächen mit C_3 als Haupttangentenkurven . . . 19

§ 5. Netzflächen mit C_4 als Haupttangentenkurven . . . 24

§ 6. Diskussion der Singularitäten. 30

Zweiter Teil: Klassifikation.

§ 1. Vorbereitungen 38

§ 2. Die Netzflächen mit C_3 als Haupttangentenkurven . 40

§ 3. Die Netzflächen mit $''C_4^{II}$ als Haupttangentenkurven 41

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548816_0080

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, diejenigen Netzflächen des projektiven Raumes (windschiefen Flächen, deren Erzeugende alle einer irreduziblen linearen Kongruenz angehören) zu charakterisieren und ihre Gleichungen in Linienkoordinaten aufzustellen, welche algebraische Raumkurven dritter und vierter Ordnung zu Haupttangentenkurven haben.[1])

Es lässt sich leicht zeigen,[2]) dass diese Aufgabe auf die Folgende zurückgeführt werden kann: Es ist vorgegeben eine Kurve $\xi(\lambda)$, die einem linearen Komplexe Ξ angehört; gesucht sind diejenigen Netzflächen $p_{ik}(\lambda)$, die in der Schmiegungsstrahlenkongruenz Σ dieser Kurve enthalten sind. Sie werden aus ihr ausgeschnitten durch einen zweiten, willkürlich vorzugebenden linearen Komplex Γ, der immer als spezieller linearer Komplex angenommen werden darf, da Ξ und Γ ein Büschel bestimmen, das zwei spezielle lineare Komplexe enthält. Die Erzeugenden der Netzfläche sind somit diejenigen Schmiegungsstrahlen der Kurve $\xi(\lambda)$, welche eine feste vorgegebene Gerade g, die Leitgerade von Γ treffen.[3]) Die den beiden Komplexen Ξ und Γ gemeinsamen Geraden bilden die lineare Kongruenz, der die Netzfläche angehören soll.

Dieser linearen Kongruenz entspricht nun, vermöge der bekannten Abbildung der Liniengeometrie auf die Punktgeometrie auf einer vierdimensionalen quadratischen Mannigfaltigkeit R_4^2 in einem linearen fünfdimensionalen Raume R_5, eine gewöhnliche Fläche zweiten Grades F^2, deren Diskriminante nicht verschwindet, wenn die Leitlinien der linearen Kongruenz getrennt sind, die ein Kegel ist, wenn die Kongruenz parabolisch ist. Eine Netzfläche $p_{ik}(\lambda)$, die in der linearen Kongruenz enthalten ist, erscheint bei dieser Abbildung als Kurve $x(\lambda)$ auf der F^2.

---

[1]) Vergl. für den Fall 4. Grades die Study'sche Aufzählung der Vereine 4. Grades, die eine Klasse bilden gegenüber der Gruppe G_{10} der Berührungstransformationen orientierter Elemente, die aus zyklischen Vereinen immer wieder solche hervorgehen lassen, Math. Annalen Bd. 88, S. 223, Fall $\nu=4$.

[2]) S. § 1 des zweiten Teiles.

[3]) Vergl. Mohrmann: Annalen 89, S. 317.

Die Frage des Zusammenhanges zwischen Netzflächen und ihren Haupttangentenkurven ist mehrfach studiert worden. Herr Mohrmann[1]) geht auf synthetischem Wege zu Werke und zwar unter Beschränkung auf gewöhnliche Singularitäten algebraischer Gebilde; höhere Singularitäten werden von ihm nur betrachtet, soweit sie für die Kernfrage seiner Arbeit (Reduzibilität der Haupttangentenkurven) in Frage kommen.

Weiter gespannt ist der Rahmen einer Arbeit von Herrn Study[2]); sie berücksichtigt beliebige singuläre Zweige analytischer Kurven, beschränkt sich dagegen auf den Fall einer allgemeinen F^2 (nichtparabolische Netzflächen). Auch lassen Study's Formeln gewisse Fragen unberührt, die bisher nur durch Plücker'sche Äquivalenzformeln erledigt werden konnten.

Beide erwähnten Arbeiten gehen von den Netzflächen bezw. Kurven $x(\lambda)$ aus. In der vorliegenden Arbeit soll der umgekehrte Weg eingeschlagen werden. Er rechtfertigt sich vor allem dadurch, dass für die hier allein behandelten Fälle die Gleichungen der Gebilde noch vollständig aufgestellt werden können. Ausserdem spricht für ihn, dass er erlaubt, die Study'schen Formeln neu herzuleiten, und auch die analogen Formeln für den Fall des Kegels zu gewinnen, was jedoch hier nicht ausgeführt wird, da die Resultate einer andern Arbeit vorbehalten bleiben.[3])

Am Schlusse dieser Einleitung möchte ich nicht versäumen, Herrn Prof. Dr. H. Mohrmann für die vielen Anregungen und Ratschläge während meiner ganzen Studienzeit, insbesondere aber bei der Ausführung dieser Arbeit, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

---

[1]) Mohrmann: *Über die Haupttangentenkurven auf den Netzflächen.* Mathemat. Annalen Bd. 73, S. 571—595.

[2]) Study: *Über Sophus Lie's Geometrie der Kreise und Kugeln.* Mathemat. Annalen Bd. 86, S. 40—77; 87, S. 207—228; 88, S. 215—241; 89, S. 298—314.

[3]) Eine demnächst erscheinende Dissertation von Frl. H. Stähelin (Basel).

Erster Teil:
Ansatz und Diskussion.

§ 1. Allgemeiner Ansatz.

Die homogenen Koordinaten ξ_i der zu betrachtenden Kurve

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1(\lambda) \\ \xi_2 &= \xi_2(\lambda) \\ \xi_3 &= \xi_3(\lambda) \\ \xi_4 &= \xi_4(\lambda) \end{aligned}\right\} \tag{1.}$$

seien als analytische oder doch mindestens zweimal differenzierbare Funktionen eines Parameters λ gegeben.

Die inhomogenen Koordinaten:

$$x_i = \frac{\xi_i(\lambda),}{\xi_4(\lambda),} \quad (i = 1, 2, 3)$$

bestimmen den Vektor OP vom Anfangspunkt O nach dem Kurvenpunkte P. Daraus erhält man als Komponenten der Vektoren $\underset{\sim}{x}'$ und $\underset{\sim}{x}''$, welche die Schmiegungsebene von P bestimmen:

$$\begin{aligned} x_i' &= -\frac{\xi_4'}{\xi_4^2}\xi_i + \frac{1}{\xi_4}\xi_i' \\ &= \alpha\xi_i + \beta\xi_i', \quad \text{und} \\ x_i'' &= \left(\frac{2\xi_4'^2}{\xi_4^3} - \frac{\xi_4''}{\xi_4^2}\right)\xi_i - \frac{2\xi_4'}{\xi_4^2}\xi_i' + \frac{1}{\xi_4}\xi_i'' \\ &= A\xi_i + B\xi_i' + \Gamma\xi_i'' \end{aligned} \tag{2.}$$

Hieraus leiten wir zunächst die Linienkoordinaten der Tangente im Kurvenpunkte P ab, deren Richtung durch den Vektor $\underset{\sim}{x}'$ gegeben

ist. Ihre Parameterdarstellung lautet, wenn y_i ein laufender Punkt ist:

$$y_i = x_i + \sigma x_i', \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Folglich erhält man ihre Linienkoordinaten $p\overset{*}{i}k$, wenn man wieder homogene Koordinaten η_i benützt, d. h.:

$$y_i = \frac{\eta_i}{\eta_4} \qquad \text{setzt, aus der Matrix:}$$

$$p_{ik}^{*} = \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{matrix} \right\| \equiv \left\| \begin{matrix} \xi & \xi_4 \\ \eta & \eta_4 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi & \xi_4 \\ \beta\xi' & -\alpha\xi_4 \end{matrix} \right\|$$

oder, weil: $-\alpha\,\xi_4 = \beta\xi_4'$,

$$p_{ik}^{*} = \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' & \xi_4' \end{matrix} \right\| . \tag{3.}$$

Um die Gleichung eines beliebigen Schmiegungsstrahles durch P zu erhalten, haben wir das Büschel der durch P gehenden Geraden zu bilden, das durch die beiden Vektoren $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ bestimmt ist:

$$y_i = x_i + \sigma x_i' + \tau x_i'',$$

oder ausführlich:

$$y_i = x_i + \sigma\,(\alpha\xi_i + \beta\xi_i') + \tau(A\,\xi_i + B\xi_i' + \Gamma\xi_i''). \tag{4.}$$

Diese Gleichung repräsentiert schon die gesuchte Schmiegungsstrahlenkongruenz der vorgegebenen Kurve (1.); um aber deren Darstellung in Linienkoordinaten zu erhalten, ist es vorteilhafter, aus (4.) einen bestimmten Schmiegungsstrahl ($\sigma: \tau = 1 : \gamma$) passend auszuwählen, und aus ihm und der Tangente (3.) für jeden Kurvenpunkt das Büschel zu bilden. Wählt man:

$$\sigma: \tau = B: -\beta, \text{ d. h. } \gamma = -\frac{\beta}{B},$$

so wird in (4.) der Koeffizient von ξ_i' gleich Null; geht man gleichzeitig wieder zu homogenen Koordinaten über, so wird:

$$\begin{aligned} \eta_i &= \xi_i + \sigma\xi_4[(\alpha+\gamma A)\xi_i + \gamma\Gamma\xi_i''] \qquad (i = 1, 2, 3) \\ \eta_4 &= \xi_4. \end{aligned}$$

Die Linienkoordinaten p_{ik}^{**} dieses speziell gewählten Schmiegungsstrahles erhält man nun aus der Matrix:

$$p_{ik}^{**} = \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi & \xi_4 \\ \eta & \eta_4 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi & \xi_4 \\ \eta\text{-}\xi & 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \xi & \xi_4 \\ (\alpha+\gamma A)\xi+\gamma\Gamma\xi'' & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi & \xi_4 \\ \gamma\Gamma\xi''-(\alpha+\gamma A)\xi_4 & \end{matrix} \right\| .$$

Nun ist aber $-(\alpha+\gamma A).\xi_4 = \gamma\Gamma\xi_4''$, wie leicht zu verifizieren ist, indem man auf die Bedeutung der Grössen α, β, γ, A, B, Γ als Funktionen von ξ_4, ξ_4' und ξ_4'' zurückgeht. Damit erhält man endlich:

$$p_{ik}^{**} = \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \xi_1'' & \xi_2'' & \xi_3'' & \xi_4'' \end{matrix} \right\| \qquad (5.)$$

Die *Schmiegungsstrahlenkongruenz* der vorgelegten Kurve erhält man jetzt, wenn man in jedem Kurvenpunkt das Büschel bildet, das bestimmt ist durch die Tangente (3.) und den Schmiegungsstrahl (5.) in der einfachen Form:

$$\boxed{p_{ik} = p_{ik}^{*}(\lambda) + \varrho \cdot p_{ik}^{**}(\lambda).} \qquad (6.)$$

Für festes $\lambda = \lambda_0$ erhält man daraus das Büschel von Schmiegungsstrahlen im Kurvenpunkte λ_0.

§ 2. Die Leitlinien der Netzflächen.

Gehört die Kurve (1.) einem linearen Komplexe Ξ an, so gehört diesem auch die ganze Kongruenz der Schmiegungsstrahlen (6.) an. Eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit wird aus ihr ausgesondert durch eine Bedingung $\Gamma(p_{ik}) = 0$, die in unserem Falle linear sein muss, damit die entstehende Regelfläche eine Netzfläche ist. Die lineare Kongruenz, der sie angehört, ist dann bestimmt als Schnitt aller Komplexe des Büschels:

$$\mu_1 \Xi + \mu_2\Gamma = 0. \qquad (7.)$$

In diesem Büschel sind nun aber immer zwei spezielle lineare Komplexe enthalten (vorausgesetzt, das nicht Ξ und Γ selbst zwei solche spezielle lineare Komplexe sind, deren Leitgeraden sich treffen); deren Leitlinien sind die Direktrizen der linearen Kongruenz. Man kann daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit von vornherein den willkürlich vorzugebenden Komplex Γ als speziellen linearen Komplex, als Gerade g annehmen:

$$\Gamma \equiv c_4\, p_{12} + c_5\, p_{13} + c_6\, p_{14} + c_1\, p_{34} + c_2\, p_{42} + c_3\, p_{23} = 0, \quad (8).$$

wobei: $$c_1\, c_4 + c_2\, c_5 + c_3\, c_6 = 0.$$

Die lineare Kongruenz und damit die entstehende Netzfläche werden parabolisch oder nicht, je nachdem ihre andere Leitgerade g' mit dieser ersten vorgegebenen g zusammenfällt oder nicht.

Ist nun der lineare Komplex der Kurve (1.) gegeben durch:

$$\Xi \equiv k_4\, p_{12} + k_5\, p_{13} + k_6\, p_{14} + k_1\, p_{34} + k_2\, p_{42} + k_3\, p_{23} = 0, \quad (9.)$$

so erhält man die beiden Werte des Parameters $\mu_1 : \mu_2$ für die beiden speziellen linearen Komplexe des Büschels (7.) aus der Bedingung:

$$(\mu_1 k_4 + \mu_2 c_4) \cdot (\mu_1 k_1 + \mu_2 c_1) + (\mu_1 k_5 + \mu_2 c_5) \cdot (\mu_1 k_2 + \mu_2 c_2) + \\ + (\mu_1 k_6 + \mu_2 c_6) \cdot (\mu_1 k_3 + \mu_2 c_3) = 0$$

oder:

$$\mu_2 \{ \mu_1 (k_4 c_1 + k_5 c_2 + k_6 c_3 + k_1 c_4 + k_2 c_5 + k_3 c_6) + \mu_2 (k_1 k_4 + \\ + k_2 k_5 + k_3 k_6) \} = 0.$$

Daraus erhält man für g bezw. g' die Werte:

$$\mu_1 : \mu_2 = 1 : 0;$$
$$\mu_1 : \mu_2 = (k_1 k_4 + k_2 k_5 + k_3 k_6) : (k_4 c_1 + k_5 c_2 + k_6 c_3 + \\ + k_1 c_4 + k_2 c_5 + k_3 c_6).$$

Demnach fallen die beiden Leitlinien zusammen, wenn:

$$k_4\, c_1 + k_5\, c_2 + k_6\, c_3 + k_1\, c_4 + k_2\, c_5 + k_3\, c_6 = 0, \quad (10.)$$

d. h. wenn die Koordinaten c_i der Geraden g die Gleichung $\Xi = 0$ erfüllen. Damit erhalten wir den

Satz 1: *Die Netzflächen, welche Kurven $\xi(\lambda)$ zu Haupttangentenkurven haben, werden parabolisch oder nicht, je nachdem ihre vorgegebene Leitgerade g dem linearen Komplex der Kurve $\xi(\lambda)$ angehört oder nicht.*[1])

§ 3. Die Study'schen Formeln.[2])

Ein beliebiger Zweig einer nicht ebenen Raumkurve kann projektiv eindeutig charakterisiert werden durch ein Symbol[3])

$$(\alpha\ \alpha_1\ \alpha_2).$$

Ist P der Ursprung des Zweiges, T die Tangente in P, und S die Schmiegungsebene durch T in P, so bedeutet α die Multiplizität des Schnittes einer Ebene durch P (aber nicht durch T) mit dem Zweige, $\alpha+\alpha_1$ die Multiplizität des Schnittes einer Ebene durch T (aber nicht durch S) mit dem Zweige, $\alpha+\alpha_1+\alpha_2$ die Multiplizität des Schnittes von S mit dem Zweige. Das Gebilde, das aus den Schmiegungsebenen eines solchen Zweiges $(\alpha\ \alpha_1\ \alpha_2)$ gebildet ist, entspricht vermöge der Dualität einem Zweige $(\alpha_2\ \alpha_1\ \alpha)$. Da nun die Netzflächen und ihre Haupttangentenkurven in sich duale Gebilde sind, so kann die vorgelegte Kurve (1.) nur Zweige der Form

$$(\alpha\ \alpha_1\ \alpha)$$

enthalten.

Die einfachsten algebraischen Raumkurven dieser Art sind diejenigen, die nicht mehr als zwei singuläre Zweige besitzen. Sie sind notwendig rational;[4]) es sind die Kurven:

---

[1]) Die Bemerkung, dass man parabolische Netzflächen erhalte, wenn g Schmiegungsstrahl von $\xi(\lambda)$ ist (Math. Annalen, Bd. 89, S. 317), ist demnach zu eng gefasst, was hiermit (auf Wunsch von Herrn Prof. Mohrmann) berichtigt sei.

[2]) S. Zitat der Einleitung.

[3]) Für das Folgende vergleiche: Segre, *Mehrdimensionale Geometrie*, Math. Enzyklopädie III. C. 7, S. 879; Zeuthen, *Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie*, S. 26; Hensel-Landsberg, *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln*, S. 460; Study, a. a. O. Bd. 87, S. 212 benützt als charakteristische Zahlen: $\varkappa_i = \alpha_{i-1} - 1$.

[4]) Mohrmann: *Bestimmung aller algebraischen W-Kurven.* Mathemat. Annalen, Bd. 89, S. 264 f.

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda^{2\alpha+\alpha_1} \\ \xi_2 &= \lambda^{\alpha+\alpha_1} \\ \xi_3 &= \lambda^{\alpha} \\ \xi_4 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (11.)$$

Wir leiten nun die *Study'schen Formeln* ab, d. h. wir bestimmen die der Stelle $(\alpha\ \alpha_1\ \alpha)$ der vorgegebenen Kurve $\xi(\lambda)$ entsprechende Singularität $(a\ a_1\ a_2)$ der Kurven $x(\lambda)$, indem wir nach dem Verfahren unseres allgemeinen Ansatzes (§ 1) die Schmiegungsstrahlenkongruenz der Kurve (11.) bilden, die in ihr enthaltenen Netzflächen bestimmen, und deren Bildkurven $x(\lambda)$ an der Stelle $\lambda = 0$ untersuchen.

Zunächst erhält man als Linienkoordinaten p_{ik}^{*} der Tangente:

$$\left.\begin{aligned} p_{12}^{*} &= k_1\lambda^{2\alpha+2\alpha_1} \ ; & p_{34}^{*} &= k_4 \\ p_{13}^{*} &= k_2\lambda^{2\alpha+\alpha_1} \ ; & p_{42}^{*} &= k_5\lambda^{\alpha_1} \\ p_{14}^{*} &= k_3\lambda^{\alpha+\alpha_1} \ ; & p_{23}^{*} &= k_6\lambda^{\alpha+\alpha_1} \end{aligned}\right\} \qquad (12.)$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \alpha & ; \ k_4 &= \alpha \\ k_2 &= \alpha+\alpha_1 & ; \ k_5 &= -\alpha-\alpha_1 \\ k_3 &= 2\alpha+\alpha_1 ; & k_6 &= \alpha_1 \end{aligned}\right\} \qquad (12.^{*})$$

Hieraus liest man die Gleichung des *linearen Komplexes* Ξ der Kurve (11.) ab:

$$\boxed{\alpha_1 \cdot p_{14} - (2\alpha+\alpha_1) \cdot p_{23} = 0.} \qquad (13.)$$

Als Linienkoordinaten p_{ik}^{**} eines *Schmiegungsstrahles* im Kurvenpunkte λ erhält man (wie leicht zu verifizieren ist):

$$p_i^{**} = \frac{l_i}{k_i} p_i^{*} \ ; (i = 1,\ldots,\ 6), \qquad (14.)$$

wenn man für den Moment die Linienkoordinaten in ihrer üblichen Reihenfolge von 1 bis 6 numeriert. Dabei ist:

$$\left.\begin{array}{lll} l_1 = (\alpha+\alpha_1)\cdot(\alpha+\alpha_1-1) & - (2\alpha+\alpha_1)\cdot(2\alpha+\alpha_1-1) \\ l_2 = \alpha\cdot(\alpha-1) & - (2\alpha+\alpha_1)\cdot(2\alpha+\alpha_1-1) \\ l_3 = & - (2\alpha+\alpha_1)\cdot(2\alpha+\alpha_1-1) \\ l_4 = \alpha\cdot(\alpha-1) & \\ l_5 = (\alpha+\alpha_1)\cdot(\alpha+\alpha_1-1) & \\ l_6 = \alpha\cdot(\alpha-1) & - (\alpha+\alpha_1)(\alpha+\alpha_1-1) \end{array}\right\} \quad (14^*)$$

Die *Schmiegungsstrahlenkongruenz* selbst nimmt nun die Form an:

$$p_i = \frac{1}{k_i}\cdot p_i^*\cdot(k_i + \varrho\cdot l_i).$$

$$\left.\begin{array}{lll} p_{12} = (k_1 + \varrho\, l_1)\lambda^{2\alpha+2\alpha_1} & ; & p_{34} = k_4 + \varrho\, l_4 \\ p_{13} = (k_2 + \varrho\, l_2)\lambda^{2\alpha+\alpha_1} & ; & p_{42} = (k_5 + \varrho\, l_5)\lambda^{\alpha_1} \\ p_{14} = (k_3 + \varrho\, l_3)\lambda^{\alpha+\alpha_1} & ; & p_{23} = (k_6 + \varrho\, l_6)\lambda^{\alpha+\alpha_1} \end{array}\right\} \quad (15.)$$

Dabei sind die Grössen k_i (12.*) die Koordinaten der Tangente p_i^* (12.) im Kurvenpunkte $\lambda=1$; die Grössen l_i (14.*) sind die Koordinaten des Schmiegungsstrahles p_i^{**} (14.) im selben Kurvenpunkte $\lambda=1$. Beide (k_i und l_i) erfüllen daher die Gleichung (13.) des linearen Komplexes Ξ.

Geht man nun dazu über, aus (15.) gewisse Netzflächen auszusondern, so hat man zu beachten, dass man alle möglichen Singularitäten ($a\ a_1\ a_2$) der Netzflächen erhält, wenn man der jetzt vorzugebenden Geraden g alle möglichen Lagen zur vorliegenden Singularität ($\alpha\ \alpha_1\ \alpha$) gibt. Dabei sind aber zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

I. Die Gerade g ist *nicht Komplexstrahl*:

Man erhält (nach Satz 1,) eine nicht-parabolische Netzfläche, deren Bildkurve $x(\lambda)$ im R_5 auf einer allgemeinen Fläche zweiten Grades liegt.

II. Die Gerade g ist *Komplexstrahl:*

In diesem Falle erhält man eine parabolische Netzfläche, deren Bildkurve $x(\lambda)$ auf einem Kegel liegt.

Im Falle I. erhält man die mehrfach erwähnten *Formeln von* Study; im Falle II. erhält man die analogen Formeln für den Kegel.

Ist g *nicht Komplexstrahl,* so lassen sich folgende Lagen zur Singularität $(\alpha\ \alpha_1\ \alpha)$, d. h. zum Punkte $\lambda = 0$ der Kurve (11.) unterscheiden:

A) g hat allgemeine Lage,
B) g trifft die Tangente von $\lambda = 0$,
C), D) g geht durch den Kurvenpunkt $\lambda = 0$.

Die Notwendigkeit der Teilung der dritten Möglichkeit in die beiden Fälle C) und D) wird sich später daraus ergeben, dass hier die Möglichkeit besteht, dass λ nicht mehr ein die Stelle $\lambda = 0$ der Kurve $x(\lambda)$ uniformisierender Parameter ist.

A) g *hat allgemeine Lage.*

$$(g:) \qquad p_{12} - p_{14} + p_{34} + p_{23} = 0.$$

Setzt man hier die Werte (15.) ein, so erhält man daraus für ϱ die Bedingung:

$$\varrho = -\frac{k_1\lambda^{2\alpha+2\alpha_1} - (k_3 - k_6)\lambda^{\alpha+\alpha_1} + k_4}{l_1\lambda^{2\alpha+2\alpha_1} - (l_3 - l_6)\lambda^{\alpha+\alpha_1} + l_4},$$

und setzt man dies nun in (15.) ein, so erhält man die Gleichung der gesuchten Netzfläche. Da uns aber nur die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ interessiert, brauchen wir für jede Koordinate p_{ik} nur die in ihr wirklich noch auftretende niedrigste Potenz von λ zu berechnen und erhalten so, nach Abspaltung des Faktors λ^{α_1}:

$$\left.\begin{aligned}
p_{12} &= (l_4\ k_1 - k_4\ l_1)\lambda^{2\alpha+\alpha_1} && +\ldots..\\
p_{13} &= (l_4\ k_2 - k_4\ l_2)\lambda^{2\alpha} && +\ldots..\\
p_{14} &= (l_4\ k_3 - k_4\ l_3)\lambda^{\alpha} && +\ldots..\\
p_{34} &= [(l_6 - l_3)\ k_4 - (k_6 - k_3)\ l_4]\lambda^{\alpha} && +\ldots..\\
p_{42} &= (l_4\ k_5 - k_4\ l_5)\lambda^{0} && +\ldots..\\
p_{23} &= (l_4\ k_6 - k_4\ l_6)\lambda^{\alpha} && +\ldots..
\end{aligned}\right\}$$

Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ ist hiernach:

$$\boxed{(a\ a_1\ a_2) = (\alpha\ \alpha\ \alpha_1),} \quad [1]$$

woraus folgt:

$$\boxed{a = a_1.} \quad [2]$$

B) *g trifft die Tangente von* $\lambda = 0$.[3]

$$(g:) \qquad p_{42} = 0.$$

Daraus folgt für ϱ: $\qquad \varrho = -\frac{k_5}{l_5},$

und daraus als Gleichung der Netzfläche:

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= (l_5\ k_1 - k_5\ l_1)\lambda^{2\alpha + 2\alpha_1} \\ p_{13} &= (l_5\ k_2 - k_5\ l_2)\lambda^{2\alpha + \alpha_1} \\ p_{14} &= (l_5\ k_3 - k_5\ l_3)\lambda^{\alpha + \alpha_1} \\ p_{34} &= (l_5\ k_4 - k_5\ l_4)\lambda^{0} \\ p_{42} &= 0 \\ p_{23} &= (l_5\ k_6 - k_5\ l_6)\lambda^{\alpha + \alpha_1} \end{aligned}\right\}$$

Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ ist demnach:

$$\boxed{(a\ a_1\ a_2) = (\alpha + \alpha_1\ \alpha\ \alpha_1),} \quad [4]$$

woraus folgt:

$$\boxed{a = a_1 + a_2.} \quad [5]$$

---

[1]) Study, a. a. O. Bd. 87, S. 221; Fall A.

[2]) Study, a. a. O. Bd. 87, S. 217; Fall A.

[3]) Von hier ab genügt es, eine Kante des Schmiegungstetraeders als Gerade g zu wählen.

[4]) A. a. O. Bd. 87, S. 222; Fall B.

[5]) A. a. O. Bd. 87, S. 217; Fall B.

C D) *g geht durch den Kurvenpunkt* $\lambda = 0$,
oder liegt in der Schmiegungsebene von $\lambda = 0$.

$$(g:) \qquad p_{23} = 0.$$

Daraus folgt für ϱ: $\qquad \varrho = -\frac{k_6}{l_6}$,

und daraus als Gleichung der Netzfläche:

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= (l_6\ k_1 - k_6\ l_1)\lambda^{2\alpha+2\alpha_1} \\ p_{13} &= (l_6\ k_2 - k_6\ l_2)\lambda^{2\alpha+\alpha_1} \\ p_{14} &= 0 \end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} p_{34} &= (l_6\ k_4 - k_6\ l_4)\lambda^{0} \\ p_{42} &= (l_6\ k_5 - k_6\ l_5)\lambda^{\alpha_1} \\ p_{23} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ ist demnach, wenn $\alpha_1 \equiv 1 \pmod 2$:

C) $\qquad \boxed{(a\ a_1\ a_2) = (\alpha_1\ 2\alpha\ \alpha_1).}$ [3])

Für $\alpha_1 \equiv 0 \pmod 2$ ist $\lambda^* = \lambda^2$ ein die Stelle $\lambda^* = 0$ uniformisierender Parameter, und die Singularität an der Stelle $\lambda^* = 0$ ist:

D) $\qquad \boxed{(a\ a_1\ a_2) = (\frac{\alpha_1}{2}\ \alpha\ \frac{\alpha_1}{2}).}$ [2])

Für beide Fälle, C) und D), folgt noch:

$$\boxed{a = a_2.} \quad [3])$$

Damit haben wir zugleich mit den Study'schen Formeln auch die von Study zum ersten Male charakterisierten Typen von möglichen Sin-

[3]) A. a. O. Bd. 87, S. 222; Fall C.
[2]) Study, a. a. O. Bd. 87, S. 222; Fall D.
[3]) Study, a. a. O. Bd. 87, S. 217; Fall C, D.

gularitäten $(a\ a_1\ a_2)$ einer Kurve, die auf einer allgemeinen Fläche zweiten Grades liegt, erhalten: Liegt eine unebene Kurve $x\,(\lambda)$ [wo $x_i\,(\lambda)$ eine analytische Funktion des Parameters λ bedeutet] auf einer allgemeinen Fläche zweiten Grades, so besteht zwischen den Zahlen a, a_1, a_2 eines jeden singulären Zweiges $(a\ a_1\ a_2)$ von $x(\lambda)$ immer eine der Relationen:

$$a = a_1; \text{ oder: } a = a_1 + a_2; \text{ oder: } a = a_2.$$

§ 4. Netzflächen mit C_3 als Haupttangentenkurven.

Die *Raumkurve dritter Ordung* C_3 sei gegeben durch die Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda^3 \\ \xi_2 &= \lambda^2 \\ \xi_3 &= \lambda \\ \xi_4 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{16.}$$

Ihre Schmiegungsstrahlenkongruenz erhält man aus (15.) für: $\alpha = \alpha_1 = 1$ in der Form:

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= (1 + 2\varrho)\lambda^4; & p_{34} &= 1 \\ p_{13} &= (2 + 3\varrho)\lambda^3; & p_{42} &= (-2-\varrho)\lambda \\ p_{14} &= (3 + 3\varrho)\lambda^2; & p_{23} &= (1 + \varrho)\lambda^2 \end{aligned}\right\} \tag{17.}$$

Geht man jedoch von dieser Darstellung aus, so erhalten die Gleichungen der Netzflächen im allgemeinen einen zu hohen Grad. Das lässt sich vermeiden, wenn man zur Bildung der Schmiegungsstrahlenkongruenz ausser dem Schmiegungsstrahl (14.), der im vorliegenden Falle die Tangente des Punktes $\lambda = \infty$ $(p_{34} = 0)$ trifft, an Stelle der Tangente (12.) denjenigen Schmiegungsstrahl benützt, der die Tangente des Punktes $\lambda = 0$ $(p_{12} = 0)$ trifft, und den man aus (17.) erhält für $\varrho = -\frac{1}{2}$. Man findet so als Parameterdarstellung der *Schmiegungsstrahlenkongruenz der Raumkurve dritter Ordnung*:

$$\boxed{\begin{aligned} p_{12} &= 2\lambda^3 & ; \quad p_{34} &= 2\varrho \\ p_{13} &= 3\lambda^2 + \varrho\lambda^3 ; & p_{42} &= -1 - 3\varrho\lambda \\ p_{14} &= 3\lambda + 3\varrho\lambda^2 ; & p_{23} &= \lambda + \varrho\lambda^2 \end{aligned}} \tag{18.}$$

Der lineare Komplex Ξ der C_3 lautet danach (oder nach (13.)):

$$\boxed{p_{14} - 3p_{23} = 0.} \tag{19.}$$

Wir gehen nun vor wie im letzten Paragraphen; wir geben eine (Leit-) Gerade g vor, leiten daraus die Bedingung für ϱ ab, und stellen die Parameterdarstellung der entsprechenden Netzfläche auf. Dabei haben wir hier noch nicht eine vollständige Aufzählung aller Typen von Netzflächen mit C_3 als Haupttangentenkurven im Sinne,[1]) sondern stellen nur sämtliche, dem regulären Punkt (111) der vorgegebenen Haupttangentenkurve entsprechenden Singularitäten der Netzfläche zusammen.

I. *Die dem* regulären Punkt (111) *entsprechenden Singularitäten der* nicht-parabolischen *Netzflächen.*

g ist *nicht Komplexstrahl*:

$$c_3 - 3\,c_6 \neq 0.$$

A) *g hat allgemeine Lage.*

$$(g:)\quad c_4\,p_{12} + c_5\,p_{13} + c_6\,p_{14} + c_1\,p_{34} + c_2\,p_{42} + c_3\,p_{23} = 0.$$

Daraus und aus (18.) ergibt sich für ϱ:

$$\varrho = -\frac{2c_4\lambda^3 + 3c_5\,\lambda^2 + (3c_6 + c_3)\lambda - c_2}{c_5\lambda^3 + (3c_6 + c_3)\lambda^2 - 3c_2\lambda + 2c_1},$$

und hieraus als Gleichung der *Netzfläche*:

$$\left.\begin{aligned}
p_{12} &= c_5\lambda^6 + (3c_6 + c_3)\,\lambda^5 - 3c_2\lambda^4 + 2c_1\lambda^3\\
p_{13} &= -c_4\lambda^6 + (3c_6 + c_3)\,\lambda^4 - 4c_2\lambda^3 + 3c_1\lambda^2\\
p_{14} &= -3c_4\lambda^5 - 3c_5\lambda^4 - 3c_2\lambda^2 + 3c_1\lambda\\
p_{34} &= -2c_4\lambda^3 - 3c_5\lambda^2 - (3c_6 + c_3)\lambda - c_2\\
p_{42} &= 3c_4\lambda^4 + 4c_5\lambda^3 + (3c_6 + c_3)\lambda^2 + c_1\\
p_{23} &= -c_4\lambda^5 - c_5\lambda^4 - c_2\lambda^2 + c_1\lambda
\end{aligned}\right\} \tag{20.}$$

[1]) S. §§ 2 und 3 des zweiten Teiles.

Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ (sowie auch an der Stelle $\lambda = \infty$) ist:

$$(a\ a_1\ a_2) = (111).$$

Satz 2: *Durch einen regulären Punkt (111) der Haupttangentenkurve, dessen Tangente von keiner Leitgeraden getroffen wird, geht eine reguläre Erzeugende (111) der nicht-parabolischen Netzfläche.*

B) *g trifft die Tangenten der Kurvenpunkte* $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$.

Setzt man in (20.) $c_1 = c_4 = 0$, so erhält man ohne weiteres als Gleichung der *Netzfläche*:

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= c_5\lambda^6 + (3c_6 + c_3)\lambda^5 - 3c_2\lambda^4 \\ p_{13} &= (3c_6 + c_3)\lambda^4 - 4c_2\lambda^3 \\ p_{14} &= -3c_5\lambda^4 - 3c_2\lambda^2 \\ p_{34} &= -3c_5\lambda^2 - (3c_6 + c_3)\lambda - c_2 \\ p_{42} &= 4c_5\lambda^3 + (3c_6 + c_3)\lambda^2 \\ p_{23} &= -c_5\lambda^4 - c_2\lambda^2 \end{aligned}\right\} \qquad (21.)$$

Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ (und $\lambda = \infty$) ist demnach:

$$(a\ a_1\ a_2) = (2\ 1\ 1).$$

Satz 3: *Trifft die Leitgerade einer nicht-parabolischen Netzfläche die Tangente eines regulären Punktes (111) ihrer Haupttangentenkurve, so wird diese Tangente zur gewöhnlichen Rückkehrerzeugenden (211) der Netzfläche.*

C) *g geht durch die Kurvenpunkte* $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$.

Die Gleichung der Netzfläche kann man aus dem vorhergehenden Fall (21.) erhalten für die (dort ausgeschlossenen) Werte: $c_2 = c_5 = 0$. Sie lautet nach Abspaltung des Faktors $(3c_6 + c_3)\lambda$:

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= \lambda^4; \quad p_{34} = -1 \\ p_{13} &= \lambda^3; \quad p_{42} = \lambda \\ p_{14} &= 0\ ; \quad p_{23} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (22.)$$

Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ (und $\lambda = \infty$) ist:

$$(a\ a_1\ a_2) = (121).$$

Satz 4: *Trifft die Leitgerade einer nicht-parabolischen Netzfläche einen regulären Punkt (111) ihrer Haupttangentenkurve, so besitzt sie dessen Tangente zur Dorsallinie t^2 zweiter Ordnung (121).*

II. *Die dem* regulären Punkt (111) *entsprechenden Singularitäten der* parabolischen *Netzflächen.*

g ist *Komplexstrahl*:

$$c_3 - 3\ c_6 = 0.$$

A) *g hat allgemeine Lage.*

Die Gleichung der Netzfläche hat dieselbe Form wie (20.), nur dass, weil nach Voraussetzung $c_3 = 3c_6$, die Konstante $(3c_6 + c_3)$ ersetzt werden kann durch $2c_3 = 6c_6$. Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ ist wieder:

$$(a\ a_1\ a_2) = (111).$$

Satz 5: *Durch einen regulären Punkt (111) der Haupttangentenkurve, dessen Tangente die Leitgerade nicht trifft, geht eine reguläre Erzeugende (111) der parabolischen Netzfläche.*

B) *g trifft die Tangenten $p_{12} = 0$; $p_{34} = 0$.*

Die Gleichung der Netzfläche erhält man aus (21.) für $c_3 = 3\ c_6$; die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ ist daher wieder:

$$(a\ a_1\ a_2) = (211).$$

Satz 6: *Trifft die Leitgerade einer parabolischen Netzfläche die Tangente eines regulären Punktes (111) ihrer Haupttangentenkurve, so wird diese Tangente zur gewöhnlichen Rückkehrerzeugenden (211) der Netzfläche.*

C) *g ist Schmiegungsstrahl durch* $\lambda = 0$.

Die Gleichung der Netzfläche erhält man aus (20.) für:

$c_1 = c_2 = c_3 = c_6 = 0$ in der Form:

$$\left.\begin{array}{lll} p_{12} = c_5\lambda^4 & ; & p_{34} = -2c_4\lambda - 3c_5 \\ p_{13} = -c_4\lambda^4 & ; & p_{42} = 3c_4\lambda^2 + 4c_5\lambda \\ p_{14} = -3c_4\lambda^3 - 3c_5\lambda^2 & ; & p_{23} = -c_4\lambda^3 - c_5\lambda^2 \end{array}\right\} \quad (23.)$$

Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ ist demnach:

$$(a\ a_1\ a_2) = (112),$$

d. h. die Kurve $x(\lambda)$ besitzt an der Stelle $\lambda = 0$ eine stationäre Ebene (vier konsekutive Punkte liegen in einer Ebene). Schneidet diese den Kegel, auf dem $x(\lambda)$ liegt, nach einem irreduziblen Kegelschnitt, sodass vier konsekutive Erzeugende der Netzfläche einer Regelschar zweiter Ordnung angehören, so reden wir nach Voss von einer *hyperbolischen Erzeugenden*. Ist die stationäre Ebene von $x(\lambda)$ Tangentialebene des Kegels, so berührt die Kurve eine Kante des Kegels, und dem Berührungspunkt entspricht eine *gewöhnliche Dorsallinie* t^1 der Netzfläche. Die genauere Untersuchung lehrt, dass es sich im vorliegenden Falle um eine Dorsallinie handelt. Also formulieren wir den

Satz 7: *Trifft die Leitgerade einer parabolischen Netzfläche deren Haupttangentenkurve in einem regulären Punkte (111), so besitzt die Netzfläche dessen Tangente zur gewöhnlichen Dorsallinie (112).*

D) *g ist Tangente in* $\lambda = 0$.

Die Gleichung der Netzfläche erhält man aus (23.) für $c_5 = 0$:

$$\left.\begin{array}{lll} p_{12} = 0 & ; & p_{34} = 2 \\ p_{13} = \lambda^3 & ; & p_{42} = -3\lambda \\ p_{14} = 3\lambda^2 & ; & p_{23} = \lambda^2 \end{array}\right\} \quad (24.)$$

Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ ist:

$$(a\ a_1\ a_2) = (111).$$

Satz 8: *Berührt die Leitgerade einer parabolischen Netzfläche deren Haupttangentenkurve in einem regulären Punkte (111), so ist sie selbst reguläre Erzeugende (111) der Netzfläche.*

§ 5. Netzflächen mit C_4 als Haupttangentenkurven.

Unter den verschiedenen Arten und Unterarten der Raumkurve vierter Ordnung C_4 gibt es nur eine einzige in sich duale, die also einem linearen Komplex angehört. Es ist dies die *Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art mit zwei stationären Tangenten* "C_4^{II}:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda^4 \\ \xi_2 &= \lambda^3 \\ \xi_3 &= \lambda \\ \xi_4 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (25.)^1)$$

Sie kann aufgefasst werden als partieller Schnitt der beiden Flächen:

$$\xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3 = 0; \quad \xi_1\xi_3^2 - \xi_2^2\xi_4 = 0, \qquad (26.)$$

die ausserdem die beiden windschiefen Erzeugenden:

$$\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0 \text{ und } \xi_3 = 0,\ \xi_4 = 0 \qquad (27.)$$

miteinander gemein haben. Jede Erzeugende μ derjenigen Schar von Erzeugenden der Fläche zweiten Grades (26.), welcher die beiden Geraden (27.) angehören:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 + \mu\xi_3 &= 0 \\ \xi_2 + \mu\xi_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (28.)$$

trifft die Kurve (25.) in den drei Punkten mit den Parametern:

$$\lambda = \sqrt[3]{-\mu},$$

und da die Erzeugenden (27.) den Werten $\mu = 0$ und $\mu = \infty$ entsprechen, schneiden sie beide die Kurve in drei konsekutiven Punkten,

[1]) Zuerst bei Cremona: Rendiconti d. R. Ist. Lombardo, ser. II, vol. I (1868) pg. 199—202.

sind daher die stationären Tangenten *(121)* in den Kurvenpunkten $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$.

Jede Erzeugende v der zweiten Schar des einzigen Hyperboloides (26.), auf welchem die Kurve (25.) liegt:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 + v\xi_2 &= 0 \\ \xi_3 + v\xi_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (29.)$$

trifft die Kurve in einem einzigen Punkte:

$$\lambda = -v.$$

Die Gleichung der Schmiegungsstrahlenkongruenz der $''C_4^{II}$ erhält man aus (15.) für $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 2$ in der Form:

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= (1 + \varrho)\lambda^6; & p_{34} &= 1 \\ p_{13} &= (3 + 2\varrho)\lambda^4; & p_{42} &= (-3 - \varrho)\lambda^2 \\ p_{14} &= (4 + 2\varrho)\lambda^3; & p_{23} &= (2 + \varrho)\lambda^3 \end{aligned}\right\} \qquad (30.)$$

Diese Darstellung wird wieder, aus demselben Grunde und in derselben Weise wie (17.), umgeformt; man erhält als endgültige Form der *Schmiegungsstrahlenkongruenz der* $''C_4^{II}$:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} p_{12} &= \lambda^4 & ; \quad p_{34} &= \varrho \\ p_{13} &= 2\lambda^2 + \varrho\lambda^4; & p_{42} &= -1 - 2\varrho\lambda^2 \\ p_{14} &= 2\lambda + 2\varrho\lambda^3; & p_{23} &= \lambda + \varrho\lambda^3 \end{aligned}\right\}} \qquad (31.)$$

Der lineare Komplex Ξ der $''C_4^{II}$ lautet demnach:

$$\boxed{p_{14} - 2\,p_{23} = 0.} \qquad (32.)$$

I. *Die dem* singulären Zweig (121) *der Haupttangentenkurve entsprechenden Singularitäten der* nicht-parabolischen *Netzflächen.*

g ist *nicht Komplexstrahl*:

$$c_3 - 2c_6 \neq 0.$$

A) *g hat allgemeine Lage.*

$$(g:)\quad c_4 p_{12} + c_5 p_{13} + c_6 p_{14} + c_1 p_{34} + c_2 p_{42} + c_3 p_{23} = 0.$$

Daraus und aus (31.) erhält man für ϱ:

$$\varrho = -\frac{c_4\lambda^4 + 2c_5\lambda^2 + (c_3 + 2c_6)\lambda - c_2}{c_5\lambda^4 + (c_3 + 2c_6)\lambda^3 - 2c_2\lambda^2 + c_1},$$

und daraus als Parameterdarstellung der *Netzfläche*:

$$\left.\begin{aligned}
p_{12} &= c_5\lambda^8 + (c_3 + 2c_6)\lambda^7 - 2c_2\lambda^6 + c_1\lambda^4\\
p_{13} &= -c_4\lambda^8 + (c_3 + 2c_6)\lambda^5 - 3c_2\lambda^4 + 2c_1\lambda^2\\
p_{14} &= -2c_4\lambda^7 - 2c_5\lambda^5 - 2c_2\lambda^3 + 2c_1\lambda\\
p_{34} &= -c_4\lambda^4 - 2c_5\lambda^2 - (c_3 + 2c_6)\lambda + c_2\\
p_{42} &= 2c_4\lambda^6 + 3c_5\lambda^4 + (c_3 + 2c_6)\lambda^3 - c_1\\
p_{23} &= -c_4\lambda^7 - c_5\lambda^5 - c_2\lambda^3 + c_1\lambda
\end{aligned}\right\} \qquad (33.)$$

Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ (ebenso $\lambda = \infty$) ist:

$$(a\ a_1\ a_2) = (112).$$

Satz 9: *Durch den Berührungspunkt einer stationären Tangente (121) der Haupttangentenkurve einer nicht-parabolischen Netzfläche geht eine hyperbolische Erzeugende (112) der Netzfläche, wenn die stationäre Tangente von keiner Leitgeraden getroffen wird.*

B) *g trifft die beiden stationären Tangenten.*

Die Gleichung der Netzfläche ergibt sich aus (33.) für $c_1 = c_4 = 0$:

$$\left.\begin{aligned}
p_{12} &= c_5\lambda^8 + (c_3 + 2c_6)\lambda^7 - 2c_2\lambda^6\\
p_{13} &= (c_3 + 2c_6)\lambda^5 - 3c_2\lambda^4\\
p_{14} &= -2c_5\lambda^5 - 2c_2\lambda^3\\
p_{34} &= -2c_5\lambda^2 + (c_3 + 2c_6)\lambda + c_2\\
p_{42} &= 3c_5\lambda^4 + (c_3 + 2c_6)\lambda^3\\
p_{23} &= -c_5\lambda^5 - c_2\lambda^3
\end{aligned}\right\} \qquad (34.)$$

Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ ist demnach:

$$(a\ a_1\ a_2) = (312).$$

Den hier anzuschliessenden Satz 10 werden wir erst nach der genaueren Untersuchung dieser Singularität (im nächsten §) formulieren.

C) *g geht durch den Kurvenpunkt* $\lambda = 0$.

Die Gleichung der Netzfläche erhält man aus (33.) für:

$$c_1 = c_2 = c_6 = 0:$$

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= c_5\lambda^7 + c_3\lambda^6 \\ p_{13} &= -c_4\lambda^7 + c_3\lambda^4 \\ p_{14} &= -2c_4\lambda^6 - 2c_5\lambda^4 \\ p_{34} &= -c_4\lambda^3 - 2c_5\lambda - c_3 \\ p_{42} &= 2c_4\lambda^5 + 3c_5\lambda^3 + c_3\lambda^2 \\ p_{23} &= -c_4\lambda^6 - c_5\lambda^4 \end{aligned}\right\} \qquad (35.)$$

Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ ist:

$$(a\ a_1\ a_2) = (222).$$

Die Formulierung des Satzes 11 folgt auch hier erst nach der genaueren Untersuchung.

D) *g ist die Gerade* $p_{23} = 0$.

Die Gleichung der Netzfläche erhält man aus (33.) für:

$$c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = c_6 = 0;\ c_3 = 1:$$

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= \lambda^6\ ; & p_{34} &= -1 \\ p_{13} &= \lambda^4\ ; & p_{42} &= \lambda^2 \\ p_{14} &= 0\ \ ; & p_{23} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (36.)$$

Hierin lässt sich der Parameter λ ersetzen durch $\lambda^* = \lambda^2$; die Netzfläche (36.) erhält dann die Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= \lambda^{*3}; & p_{34} &= -1 \\ p_{13} &= \lambda^{*2}; & p_{42} &= \lambda^2 \\ p_{14} &= 0\ \ ; & p_{23} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (37.)$$

wo nun λ^* ein die Stelle $\lambda^* = 0$ uniformisierender Parameter ist.

Die Singularität an der Stelle $\lambda^* = 0$ (ebenso $\lambda^* = \infty$) ist:

$$(a\ a_1\ a_2) = (111).$$

(111) ist in diesem Falle eine gewöhnliche Dorsallinie, da die Bildkurve $x(\lambda)$ im R_3 an den Stellen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ die eine der beiden Erzeugenden des Hyperboloides berührt, auf dem sie liegt.

Die Fläche dritten Grades (37.) erscheint in der Darstellung (36.) als doppelt überdeckt. Da jede der Erzeugenden λ_0 der Fläche (36.) Schmiegungsstrahl im Punkte λ_0 der Kurve (25.) ist, und man für $\lambda = \lambda_0$ und $\lambda = -\lambda_0$ dieselbe Erzeugende erhält, besteht also diese Fläche aus lauter doppelten Schmiegungsstrahlen, sogen. *Hauptsehnen*, der $''C_4^{II}$. Sie alle treffen die beiden Geraden $p_{14} = 0$ und $p_{23} = 0$. Also:

Satz 12: *Die Raumkurve 4. Ordnung II. Art mit zwei stationären Tangenten besitzt eine einfach unendliche Schar von Hauptsehnen, welche eine Netzfläche 3. Ordnung bilden. Diese hat die Verbindungssehne der beiden Streckpunkte zur doppelten, die Schnittgerade ihrer Schmiegungsebenen zur einfachen Leitgeraden und die beiden stationären Tangenten der $''C_4^{II}$ zu gewöhnlichen Dorsallinien. Die $''C_4^{II}$ ist Haupttangentenkurve ihrer Hauptsehnenfläche.*[1])

II. *Die dem* singulären Zweig (121) *der Haupttangentenkurve entsprechenden Singularitäten der* parabolischen *Netzflächen.*

g ist *Komplexstrahl*:

$$c_3 - 2c_6 = 0.$$

A) *g hat allgemeine Lage.*

Die Gleichung der Netzfläche hat dieselbe Form wie Gleichung (33.), nur dass die Konstante $(c_3 + 2c_6)$ zu ersetzen ist durch $2c_3$ oder (was dasselbe ist) $4c_6$. Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ ist daher auch in diesem Falle:

$$(a\ a_1\ a_2) = (112).$$

[1]) Mohrmann, a. a. O., S. 595.

Satz 13: *Durch den Berührungspunkt einer stationären Tangente (121) der Haupttangentenkurve einer parabolischen Netzfläche geht eine hyperbolische Erzeugende (112) der Netzfläche, wenn die stationäre Tangente die Leitgerade nicht trifft.*

B) *g trifft die beiden stationären Tangenten.*

Die Gleichung der Netzfläche erhält man aus (34.) für $c_3 = 2\,c_6$. Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ ist daher wieder:

$$(a\ a_1\ a_2) = (312).$$

Die genaue Formulierung des Satzes 14 folgt im nächsten Paragraphen.

C) *g ist Schmiegungsstrahl in $\lambda = 0$.*

Die Gleichung der Netzfläche ergibt sich aus (33.) für

$c_1 = c_2 = c_3 = c_6 = 0$:

$$\left.\begin{array}{llll} p_{12} = & c_5\lambda^6 & ; & p_{34} = -c_4\lambda^2 - 2c_5 \\ p_{13} = -c_4\lambda^6 & & ; & p_{42} = 2c_4\lambda^4 + 3c_5\lambda^2 \\ p_{14} = -2c_4\lambda^5 - 2\,c_5\lambda^3 & & ; & p_{23} = -c_4\lambda^5 - c_5\lambda^3 \end{array}\right\} \quad (38)$$

Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ ist:

$$(a\ a_1\ a_2) = (213).$$

Die Formulierung des Satzes 15 folgt im nächsten Paragraphen.

D) *g ist die stationäre Tangente $p_{12} = 0$.*

Die Gleichung der Netzfläche folgt aus (33.) für:

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = 0;\ c_4 = 1:$$

$$\left.\begin{array}{llll} p_{12} = & 0 & ; & p_{34} = -1 \\ p_{13} = -\lambda^4 & & ; & p_{42} = 2\lambda^2 \\ p_{14} = -2\lambda^3 & & ; & p_{23} = -\lambda^3 \end{array}\right\} \quad (39.)$$

Die Singularität an der Stelle $\lambda = 0$ ist:

$$(a\ a_1\ a_2) = (211).$$

Satz 16: *Ist die Leitgerade einer parabolischen Netzfläche stationäre Tangente (121) ihrer Haupttangentenkurve, so gehört sie selbst als gewöhnliche Rückkehrerzeugende (211) der Netzfläche an.*

§ 6. Diskussion der Singularitäten.

Trifft die Leitgerade einer (allgemeinen oder parabolischen) Netzfläche eine Tangente ihrer Haupttangentenkurve, so wird diese zur *Rückkehrerzeugenden* der Netzfläche (Satz 3 und Satz 6). Man pflegt nun in der projektiven Punktgeometrie den Rückkehrpunkt als Spezialfall des Doppelpunktes zu betrachten, da die Eigenschaften des Schnittes einer beliebigen Ebene durch den stationären Punkt dieselben sind wie beim Doppelpunkt. Hier jedoch wollen wir von *Doppelerzeugenden* nur da reden, wo sich die Fläche längs einer Erzeugenden *selbst durchsetzt*, d. h. wo dieselbe Erzeugende in der Parameterdarstellung zweimal (mit verschiedenem Parameter) auftritt. Eine Netzfläche hat dann immer die von der Leitlinie getroffenen Hauptsehnen ihrer Haupttangentenkurve zu Doppelerzeugenden.

a) Im Falle der Netzflächen mit C_3 als Haupttangentenkurven können *Doppelerzeugende* überhaupt nicht auftreten, da die C_3 keine Hauptsehnen besitzt.

Um die Parameter ihrer Rückkehrerzeugenden zu erhalten, stellen wir die Bedingung dafür auf, dass Leitgerade und Tangente des Punktes λ der C_3 sich treffen. Die Koordinaten der *Tangente* sind nach Formel (3.):

$$\left.\begin{array}{llll} p_{12} = \lambda^4 ; & p_{34} = 1 \\ p_{13} = 2\lambda^3 ; & p_{42} = -2\lambda \\ p_{14} = 3\lambda^2 ; & p_{23} = \lambda^2 \end{array}\right\} \qquad (40.)$$

Bringen wir sie zum Schnitt mit der vorgegebenen Leitgeraden:

$$(g): \quad c_4\ p_{12} + c_5\ p_{13} + c_6\ p_{14} + c_1\ p_{34} + c_2\ p_{42} + \\ + c_3\ p_{23} = 0,$$

so erhalten wir für die Parameter der *Rückkehrerzeugenden* die Gleichung:

$$c_4\lambda^4 + 2c_5\lambda^3 + (3c_6 + c_3)\lambda^2 - 2c_2\lambda + c_1 = 0. \quad (41.)$$

Satz 17: *Die allgemeinste Netzfläche mit C_3 als Haupttangentenkurven besitzt vier Rückkehrerzeugende.*

Ist die Leitgerade g *Sekante* der C_3, z. B. $c_4\, p_{12} + c_3\, p_{23} = 0$, so folgt aus (41.) für die Parameter der Rückkehrerzeugenden:

$$\lambda^2(c_4\lambda^2 + c_3) = 0,$$

d. h.: zwei der Rückkehrerzeugenden gehören dem sich bei $\lambda = 0$ abspaltenden Büschel von Schmiegungsstrahlen an, und die (nicht-parabolische) Fläche besitzt nur noch zwei Rückkehrerzeugende. — Auf analogem Wege erhält man, dass eine parabolische Netzfläche, deren Leitgerade Sekante (und daher Schmiegungsstrahl) der C_3 ist, nur noch eine einzige Rückkehrerzeugende besitzt. — Man sieht ferner ohne weiteres ein, dass, wenn g *Sehne* der C_3 ist, die entstehende Netzfläche überhaupt keine Rückkehrerzeugenden mehr besitzt.

b) Wenden wir uns den Netzflächen mit $''C_1^{II}$ als Haupttangentenkurven zu, und erinnern wir uns an die am Anfang dieses Paragraphen gegebene Definition der *Doppelerzeugenden*, so erhalten wir deren Parameter λ aus der Schnittbedingung der Geraden g mit der Hauptsehne (36.) durch den Kurvenpunkt λ der $''C_1^{II}$:

$$c_4\lambda^6 + c_5\lambda^4 + c_2\lambda^2 - c_1 = 0. \quad (42.)$$

Diese Gleichung ist vom dritten Grade in λ^2 und liefert drei Wurzelpaare: $\lambda = +\lambda_1, +\lambda_2, \pm\lambda_3$, welche die Parameter der jeweiligen beiden Stützpunkte der drei von g getroffenen Hauptsehnen sind.

Satz 18: *Die allgemeinste (nicht-parabolische oder parabolische) Netzfläche mit $''C_1^{II}$ als Haupttangentenkurven besitzt drei Doppelerzeugende.*

Trifft g die $''C_4^{II}$ in einem regulären Punkt $\lambda = \lambda_0$, so gehört die getroffene Hauptsehne dem bei $\lambda = \lambda_0$ sich abspaltenden Büschel an, und die Netzfläche besitzt nun noch zwei Doppelerzeugende. Daraus folgt, dass wenn g Sehne, bezw. Trisekante der $''C_4^{II}$ ist, die Netzfläche nur noch eine, bezw. gar keine Doppelerzeugende mehr besitzt.

Ist g Schmiegungsstrahl im Kurvenpunkte $\lambda = \tau$, so lautet die Gleichung für die Parameter der Doppelerzeugenden:

$$\varrho\,\lambda^6 - (1 + 2\,\varrho\,\tau^2)\lambda^4 + (2\,\tau^2 + \varrho\,\tau^4)\lambda^2 - \tau^4 = 0,$$

oder:

$$(\lambda^2 - \tau^2)^2 \cdot (\varrho\,\lambda^2 - 1) = 0,$$

d. h. es fallen zwei der Doppelerzeugenden mit der sich abspaltenden Hauptsehne durch $\lambda = \tau$ zusammen, und die Netzfläche besitzt nur noch eine einzige Doppelerzeugende. — Dasselbe gilt, wenn g Hauptsehne ist ($\varrho = -\frac{1}{\tau^2}$):

$$(\lambda^2 - \tau^2)^2 \cdot (\lambda^2 + \tau^2) = 0.$$

Ist aber g Tangente, so geht Gleichung (42.) über in:

$$(\lambda^2 - \tau^2)^3 = 0,$$

d. h. die Netzfläche besitzt in diesem Falle gar keine Doppelerzeugenden mehr, da alle dem sich abspaltenden Büschel angehören.

Die *Tangente* der $''C_4^{II}$ im Kurvenpunkte λ hat die Koordinaten:

$$\left.\begin{array}{llll} p_{12} = \lambda^6 & ; & p_{34} = 1 \\ p_{13} = 3\lambda^4 & ; & p_{42} = -3\lambda^2 \\ p_{14} = 4\lambda^3 & ; & p_{23} = 2\lambda^3 \end{array}\right\} \qquad (43.)$$

Also lautet die Schnittbedingung dieser Tangente mit der Leitgeraden g, d. h. die Gleichung für die Parameter der *Rückkehrerzeugenden*:

$$\boxed{c_4\lambda^6 + 3\,c_3\lambda^4 + (2\,c_3 + 4\,c_6)\,\lambda^3 - 3c_2\lambda^2 + c_1 = 0} \qquad (44.)$$

Satz 19: *Die allgemeinste Netzfläche mit "C_4^{II} als Haupttangentenkurven besitzt sechs Rückkehrerzeugende.*

Geht die Gerade g durch einen regulären Punkt der "C_4^{II}, so trifft sie dort (falls g nicht Komplexstrahl ist) deren Tangentenfläche zweipunktig, falls g aber Komplexstrahl und daher in diesem Falle Schmiegungsstrahl ist, sogar dreipunktig. Daraus folgt:

Satz 20: *Ist eine Leitgerade g einer nicht-parabolischen Netzfläche mit "C_4^{II} als Haupttangentenkurven Sekante, Sehne oder Trisekante der "C_4^{II}, so besitzt die Netzfläche nur noch vier, bezw. zwei, bezw. gar keine Rückkehrerzeugende; ist die Leitgerade einer parabolischen Netzfläche mit "C_4^{II} als Haupttangentenkurven Schmiegungsstrahl, bezw. Hauptsehne der "C_4^{II}, so besitzt die Netzfläche nur noch drei, bezw. gar keine Rückkehrerzeugende.*

Wir wenden uns nun noch der Diskussion derjenigen speziellen Netzflächen zu, welche Singularitäten:

1. *(312)* [Gleichung (34.)]
2. *(222)* [Gleichung (35.)]
3. *(213)* [Gleichung (38.)]

besitzen.

1. Die *Singularität (312)* entsteht, wenn g eine der stationären Tangenten der "C_4^{II} trifft. Sie besteht aus zwei gewöhnlichen Rückkehrerzeugenden (211) und einer hyperbolischen Erzeugenden (112). Die Fläche (34.) müsste demnach, ausser den beiden Singularitäten (312) an den Stellen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$, noch zwei Rückkehrerzeugende und drei Doppelerzeugende besitzen. Gleichung (44.) liefert für diesen Fall tatsächlich:

$$\lambda^2 \{ 3c_5\lambda^2 + (2\,c_3 + 4\,c_6)\lambda - 3c_2 \} = 0,$$

das heisst:

$$\lambda^2 = \infty;\ \lambda^2 = 0;\ 3c_5\lambda^2 + (2c_3 + 4c_6)\lambda - 2\,c_2 = 0$$

für die Parameter der Rückkehrerzeugenden. Aus Gleichung (42.) hingegen folgt für unsern Fall:

$$\lambda^2(c_5\lambda^2 + c_2) = 0,$$

das heisst:

$$\lambda^2 = \infty;\ \lambda^2 = 0;\ \lambda^2 = -\frac{c_2}{c_5}.$$

Demnach enthält jede der beiden in diesem Falle auftretenden Singularitäten (312) eine Doppelerzeugende, und die Netzfläche (34.) besitzt nur eine einzige Selbstdurchsetzung. Wir formulieren also jetzt:

Satz 10 [Satz 14]: *Trifft die Leitgerade einer nicht-parabolischen Netzfläche [einer parabolischen Netzfläche] eine stationäre Tangente (121) ihrer Haupttangentenkurve, so wird diese zur singulären Erzeugenden (312) der Netzfläche und enthält ausser zwei gewöhnlichen Rückkehrerzeugenden (211) und einer hyperbolischen Erzeugenden (112) noch eine Doppelerzeugende.*

Diese Singularität bildet ein Analogon zum *Bikuspidalpunkt* (31) der ebenen Kurven, der ausser zwei Rückkehrpunkten auch einen Doppelpunkt enthält. Wir reden daher von einer *Bikuspidalerzeugenden (312)*. Dies rechtfertigt sich auch daher, dass die Projektion aus einem Raumpunkt allgemeiner Lage der Singularität (312) der Bildkurve $x(\lambda)$ ein Bikuspidalpunkt (31) ist. Die Projektion aus einem Punkte der Schmiegungsebene ergibt einen ebenen Zweig (33) [Bikuspidalpunkt und Undulationspunkt vereinigt]; die Projektion aus einem Punkte der Tangente ist (42) [Schnabelspitze, die drei gewöhnliche Rückkehrpunkte enthält]; die Projektion aus dem singulären Punkte selbst ist (12) [gewöhnliche stationäre Tangente].

2. Die *Singularität (222)* tritt auf, wenn g eine stationäre Tangente der Haupttangentenkurve in ihrem Berührungspunkte mit der Kurve trifft, ohne aber in dessen Schmiegungsebene zu liegen. Sie besteht aus einer Rückkehrerzeugenden (211), einer Dorsallinie zweiter Ordnung (121) und einer hyperbolischen Erzeugenden (112). Ausserdem besitzt die Fläche (35.) noch drei Rückkehrerzeugende (im ganzen also deren vier nach Satz 20), wie sich mit Hilfe der Gleichung (44.) leicht verifizieren lässt. Für die Doppelerzeugenden erhält man aus (42.):

$$\lambda^4(c_4\lambda^2 + c_5) = 0,$$

d. h. die eine der beiden der Fläche noch verbleibenden Doppelerzeugenden ist in der Singularität (222) enthalten, und die Fläche

besitzt ausser ihr nur noch eine einzige Doppelerzeugende. Wir formulieren also:

Satz 11: *Trifft die Leitgerade einer nicht-parabolischen Netzfläche eine stationäre Tangente (121) ihrer Haupttangentenkurve in deren Berührungspunkt, so wird diese zur singulären Erzeugenden (222) der Netzfläche und enthält ausser einer gewöhnlichen Rückkehrerzeugenden (211), einer Dorsallinie zweiter Ordnung (121) und einer hyperbolischen Erzeugenden (112) noch eine Doppelerzeugende.*

Der Punkt $\lambda = 0$ der Bildkurve $x(\lambda)$ von (35.) hat im Reellen die Form einer *Schnabelspitze* (222) mit lauter stationären Elementen, die aus jedem Punkte des Raumes als Schnabelspitze erscheint. Die Projektionen auf eine Ebene allgemeiner Lage sind:

(22) aus einem Punkt allgemeiner Lage,
(24) aus einem Punkt der Tangente,
(42) aus einem Punkt der Schmiegebene,
(22) aus dem singulären Punkt selbst.

3. Die *Singularität (213)* tritt auf, wenn die Leitgerade g einer parabolischen Netzfläche Schmiegungsstrahl im Berührungspunkt einer stationären Tangente ihrer Haupttangentenkurve ist. Sie besteht aus einer gewöhnlichen Rückkehrerzeugenden (211), einer gewöhnlichen Dorsallinie (112) und einer hyperbolischen Erzeugenden (112). Die Anzahl der Rückkehrerzeugenden der Fläche (38.) ist gleich drei (vergl. Satz 20.); ausser der in der Singularität (213) enthaltenen besitzt die Netzfläche also noch zwei Rückkehrerzeugende, wie man aus Gleichung (44.) leicht ersieht. Die Gleichung (42.) der Doppelerzeugenden, deren die Fläche nur noch eine einzige besitzen kann (s. die weiteren Ausführungen zu Satz 18), lautet im vorliegenden Fall:

$$\lambda^4 \cdot (c_4 \lambda^2 + c_5) = 0,$$

d. h. die der Fläche verbleibende Doppelerzeugende $\lambda = \pm \sqrt{-\frac{c_5}{c_4}}$ fällt nicht mit der Singularität (213) zusammen. Wir formulieren daher:

Satz 15: *Ist die Leitgerade einer parabolischen Netzfläche Schmiegungsstrahl durch den Berührungspunkt einer stationären Tangente (121)*

ihrer Haupttangentenkurve, so besitzt die Netzfläche eine singuläre Erzeugende (213), welche eine Rückkehrerzeugende (211), eine Dorsallinie erster Ordnung (112) und eine hyperbolische Erzeugende (112) in sich vereinigt.

Die ebene Projektion der Singularität (213) der Bildkurve im R_5 aus einem Raumpunkt allgemeiner Lage ist ein Zweig (21), d. h. ein gewöhnlicher Rückkehrpunkt. Die Projektion aus einem Punkte der Schmiegungsebene ist: (24) [Schnabelspitze, die drei stationäre Tangenten enthält]; die Projektion aus einem Punkte der Tangente ist: (33) [Bikuspidalpunkt und Undulationspunkt vereinigt]; die Projektion aus dem Ursprung des singulären Zweiges selbst ist: (13) [Undulationspunkt].

Der Vollständigkeit halber möge hier noch die Darstellung einer speziellen Netzfläche abgeleitet werden, deren Gleichung nicht unmittelbar aus der allgemeinen Form (33.) abgelesen werden kann.

Es sei g Sekante im Kurvenpunkte $\lambda = -\tau$ der $''C_4^{II}$ und liege in der Schmiegungsebene des Punktes $\lambda = +\tau$. Die Gleichung der Schmiegungsebene im Punkte $\lambda = \tau$ lautet:

$$\xi_1 - 2\tau\xi_2 + 2\tau^3\xi_3 - \tau^4\xi_4 = 0, \tag{45.}$$

oder in Parameterdarstellung, da:

$$2\,\tau : 1 : 0 : 0; \quad \tau^4 : 0 : 0 : 1; \quad 0 : 0 : \tau : 2$$

drei ihrer Punkte sind:

$$\left.\begin{array}{lccc} \xi_1 = & 2\,\tau\,\varphi_1 + \tau^4\,\varphi_2 & & * \\ \xi_2 = & \varphi_1 & * & * \\ \xi_3 = & * & * & \tau\,\varphi_3 \\ \xi_4 = & * & \varphi_2 + 2\,\varphi_3 & \end{array}\right\} \tag{46.}$$

Die Koordinaten c_i der Leitgeraden g erhält man, da noch unbeschadet der Allgemeinheit $\varphi_3 = 0$ gesetzt werden darf, aus der Matrix:

$$c_i = \left\| \begin{array}{cccc} \tau^4 & & -\tau^3 & -\tau & 1 \\ 2\,\tau\,\varphi_1 + \tau^4\,\varphi_2 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 \end{array} \right\| \tag{47.}$$

Die Gleichung der Netzfläche wird dann nach (33.):

$$\left.\begin{aligned}
p_{12} &= (\varphi_1 + \tau^3\varphi_2)\lambda^6 - (3\tau^2\varphi_1 + \tau^5\varphi_2)\lambda^4 \\
p_{13} &= \tau\,\varphi_2\lambda^6 + \tau^3\varphi_2\lambda^4 - (6\,\tau^2\varphi_1 + 2\,\tau^5\varphi_2)\lambda^2 \\
p_{14} &= 2\,\tau\,\varphi_2\,\lambda^5 - 2\,\varphi_1\,\lambda^3 - (6\,\tau^2\varphi_1 + 2\,\tau^5\varphi_2)\lambda \\
p_{34} &= \tau\,\varphi_2\,\lambda^2 - (2\,\varphi_1 + \tau^3\varphi_2) \\
p_{42} &= -2\,\tau\,\varphi_2\,\lambda^4 + (3\,\varphi_1 + \tau^3\varphi_2)\,\lambda^2 + (3\,\tau^2\,\varphi_1 + \tau^5\varphi_2) \\
p_{23} &= \tau\,\varphi_2\lambda^5 - \varphi_1\lambda^3 - (3\tau^2\varphi_1 + \tau^5\varphi_2)\lambda
\end{aligned}\right\} \quad (48.)$$

Dabei wird die (Leit-) Gerade g

für: $\varphi_1 : \varphi_2 = 0 : 1$ zur Hauptsehne $(\tau, -\tau)$,

für: $\tau = 0$ zum Schmiegungsstrahl durch $\lambda = 0$,

für: $\left\{\begin{matrix}\varphi_1 : \varphi_2 = 0 : 1 \\ \tau = 0\end{matrix}\right\}$ zur stationären Tangente in $\lambda = 0$.

Zweiter Teil:
Klassifikation.

§ 1. Vorbereitungen.

In den Sätzen des ersten Teiles haben wir nun das Material beieinander, um an eine vollständige Klassifikation der Netzflächen mit Haupttangentenkurven dritter und vierter Ordnung herantreten zu können. Wir sind jedoch noch den Nachweis schuldig, dass unser Ansatz *alle* diese Netzflächen liefere.

Eine Haupttangentenkurve einer Fläche hat die Eigenschaft, dass ihre sämtlichen Schmiegungsebenen Tangentialebenen dieser Fläche sind, und umgekehrt ist eine Kurve Haupttangentenkurve, wenn sie diese Eigenschaft besitzt.[1]) Daraus folgt, dass alle Erzeugenden einer windschiefen Fläche in der Schmiegungsebene ihres Schnittpunktes mit der Haupttangentenkurve liegen, d. h. Schmiegungsstrahlen der Haupttangentenkurve sind. Windschiefe Flächen, die vorgegebene Kurven C zu Haupttangentenkurven haben, müssen also in deren Schmiegungsstrahlenkongruenz Σ enthalten sein. Soll nun die windschiefe Fläche insbesondere eine *Netzfläche* sein, d. h. sollen ihre Erzeugenden einer irreduziblen linearen Kongruenz (einem Strahlennetz) angehören, so muss Σ entweder selbst linear sein, oder aber in einem linearen Komplexe Ξ enthalten sein; in diesem zweiten Falle (der andere kommt nicht in Betracht) lässt sich dann durch eine lineare Bedingung $\Gamma = 0$ eine Fläche aus Σ aussondern, die zugleich in der Schnittkongruenz der beiden linearen Komplexe Ξ und Γ enthalten und folglich eine Netzfläche ist. Dass dieser zweite lineare Komplex Γ immer als speziell, d. h. als Gerade g angenommen werden darf, haben wir schon früher auseinandergesetzt.

Die Aufgabe, sämtliche Netzflächen der Schmiegungsstrahlenkongruenz Σ der vorgegebenen (Haupttangenten-) Kurve C zu be-

[1]) Vergl. z. B. Bianchi: *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, (deutsch von Lukat) 2. Aufl. (1910), S. 108.

stimmen, läuft also wirklich einfach darauf hinaus, aus Σ diejenigen ∞^1 Geraden auszusondern, welche die vorgegebene feste Gerade g, die Leitgerade von Γ, treffen.

Wird eine feste Gerade g vorgegeben, so schneiden alle Geraden des linearen Komplexes Ξ, die g treffen, zugleich eine zweite Gerade g', die reziproke Polare von g in Bezug auf Ξ; g und g' sind dann die beiden Leitlinien der linearen Kongruenz, der die entstehende Netzfläche angehört, und damit auch Leitlinien der Netzfläche selbst. g und g' fallen zusammen, die lineare Kongruenz und die in ihr enthaltene Netzfläche werden parabolisch, wenn g selbst Ξ angehört, insbesondere also dann, wenn g selbst Schmiegungsstrahl ist (s. Satz 1).

Im *nicht-parabolischen* Falle besitzt jede Netzfläche zwei Leitgeraden g und g', die im allgemeinsten Falle einer Netzfläche mit C_3 als Haupttangentenkurven dreifache Leitgeraden sind, da durch jeden ihrer Punkte drei Schmiegungsebenen an die Kurve gehen. Wir halten dies fest durch das Symbol (3,3), das wir der Fläche beilegen: (n_1, n_2) bedeutet: nicht-parabolische Netzfläche der Ordnung $n_1 + n_2$ mit einer n_1-fachen und einer n_2-fachen Leitgeraden. Die Flächen (n_1, n_2) und (n_2, n_1) sind identisch.

Geht g durch einen Kurvenpunkt (Sekante), so spaltet sich ein Büschel von Schmiegungsstrahlen ab, ebenso, wenn die reziproke Polare g' Sekante ist (oder, was dasselbe ist, wenn g in einer Schmiegungsebene liegt). Bei der C_3 sind ausser dem allgemeinen Fall (3,3) nur noch die Fälle (2,3) und (1,3) möglich, wenn g Sekante bezw. Sehne (Verbindungsgerade zweier Kurvenpunkte) ist. Bei der $''C_4^{II}$ sind ausser dem allgemeinen Falle (4,4) noch folgende möglich: g ist Sekante: Fall (3,4); g ist Sehne: Fall (2,4); g ist Trisekante[1]): Fall (1,4); sowohl g als auch g' sind Sekanten (oder, was dasselbe ist, g ist Sekante und liegt zugleich in einer Schmiegungsebene der $''C_4^{II}$, ohne aber durch deren Berührungspunkt zu gehen): Fall (3,3).

Im *parabolischen* Falle besitzt die Netzfläche nur noch eine einzige Leitgerade g. Die Fläche erhält das Symbol $[\alpha, \beta]$, wenn g α-fache Leitgerade und β-fache Erzeugende der parabolischen Netzfläche der Ordnung $2\alpha + \beta$ ist. Jede solche parabolische Netzfläche kann als Spezialfall derjenigen allgemeinen Netzfläche (n_1, n_2) gleichen

[1]) S. Gleichung (28).

Grades aufgefasst werden, deren n_1 und n_2 einander gleich, bezw. um eine Einheit von einander verschieden sind.[1]) Hieraus und aus unseren Sätzen 18, 19 und 20 erhalten wir die folgenden Möglichkeiten:

Die parabolischen Netzflächen mit C_3 als Haupttangentenkurven sind vom Typus [3,0], wenn g Komplexstrahl allgemeiner Lage ist; vom Typus [2,0], wenn g Schmiegungsstrahl und vom Typus [1,1], wenn g Tangente der C_3 ist.

Die parabolischen Netzflächen mit $''C_4^{II}$ als Haupttangentenkurven sind vom Typus [4,0], wenn g Komplexstrahl allgemeiner Lage; vom Typus [3,0], wenn g Schmiegungsstrahl; vom Typus [2,0], wenn g Hauptsehne; vom Typus [2,1], wenn g Tangente und vom Typus [1,2], wenn g stationäre Tangente der $''C_4^{II}$ ist.

In den folgenden beiden Paragraphen charakterisieren wir die verschiedenen Arten von Netzflächen durch die Lage ihrer Leitgeraden g zur (vorgegebenen) Haupttangentenkurve C_3 bezw. $''C_4^{II}$, durch ihr Symbol (n_1, n_2) oder $[\alpha, \beta]$, durch ihre Ordnung n, durch ihre Singularitäten (312) [Satz 10], (222) [Satz 11], (213) [Satz 16], sowie durch die Anzahlen d ihrer gewöhnlichen Doppelerzeugenden, r ihrer Rückkehrerzeugenden (211), h_4 ihrer hyperbolischen Erzeugenden (112)[2]) und t^k ihrer Dorsallinien k^{ter} Ordnung. Ferner bezeichnen wir mit w_1 und w_2 die beiden stationären Tangenten (Wendetangenten) der $''C_4^{II}$, mit S_1 und S_2 deren Berührungspunkte (Streckpunkte), mit v die Verbindungsgerade von S_1 und S_2, und endlich mit s die Schnittgerade der beiden Schmiegungsebenen der Streckpunkte.

§ 2. Die Netzflächen mit C_3 als Haupttangentenkurven.

I. Nicht-parabolische Netzflächen.

a) g hat allgemeine Lage.

Netzfläche (3,3). $n = 6;\ r = 4.$[3])

---

[1]) Mohrmann, a. a. O. S. 591.

[2]) Wobei nochmals darauf hingewiesen sei, dass im parabolischen Fall das Symbol (112) sowohl eine h_4 als auch eine t^1 darstellen kann.

[3]) Gleichung (20).

b) g ist Sekante.

Netzfläche (2,3). $n = 5;\ r = 2;\ t^2 = 1.$

c) g ist Sehne.

Netzfläche (1,3). $n = 4;\ t^2 = 2.$[1])

II. Parabolische Netzflächen.

a) g ist Komplexstrahl allgemeiner Lage.

Netzfläche [3,0]. $n = 6;\ r = 4.$[2])

b) g ist Schmiegungsstrahl allgemeiner Lage.

Netzfläche [2,0]. $n = 4;\ r = 1;\ t^1 = 1.$[3])

c) g ist Tangente.

Netzfläche [1,1]. $n = 3.$[4])

g ist gewöhnliche Erzeugende der Fläche.

§ 3. Die Netzflächen mit $''C_t^{II}$ als Haupttangentenkurven.

I. Nicht-parabolische Netzflächen.

a) g hat allgemeine Lage.

1.) *Netzfläche (4,4).* $n = 8;\ d = 3;\ r = 6;\ h_4 = 2.$[5])
Unterfälle: 1α) g trifft v, zwei der Doppelerzeugenden schneiden sich im Punkte (g, v); g liegt in einer Ebene mit s, zwei der Doppelerzeugenden liegen in der Ebene (g, s).

[1]) Gleichung (22).
[2]) Gleichung aus (20) für $c_3 = 3c_6$.
[3]) Gleichung (23).
[4]) Gleichung (24).
[5]) Gleichung (33).

1β) g trifft zugleich v und s, zwei der Doppelerzeugenden schneiden sich im Punkte (g, v) und liegen in der Ebene (g, s).

2.) *Netzfläche (4,4)* mit *einer singulären Erzeugenden (312).*
g trifft w_1 oder w_2;
$n = 8$; $d = 2$; $r = 4$; $h_4 = 1$.
Dabei können die zu *1α*) und *1β*) analogen Unterfälle *2α*) und *2β*) auftreten.

3.) *Netzfläche (4,4)* mit *zwei sing. Erz. (312).*
g trifft w_1 und w_2;
$n = 8$; $d = 1$; $r = 2$.[1])

b) g ist Sekante.

4). *Netzfläche (3,4).* $n = 7$; $d = 2$; $r = 4$; $h_4 = 2$; $t^2 = 1$.
Unterfall: g geht durch v (dual durch s); die beiden Doppelerzeugenden gehen durch (g, v), (liegen in (g, s)).

5.) *Netzfläche (3,4)* mit *einer sing. Erz. (312).*
g trifft w_1 oder w_2;
$n = 7$; $d = 1$; $r = 2$; $h_4 = 1$; $t^2 = 1$.

6.) *Netzfläche (3,4)* mit *zwei sing. Erz. (312).*
g trifft w_1 und w_2;
$n = 7$; $t^2 = 1$.

7.) *Netzfläche (3,4)* mit *einer sing. Erz. (222).*
g durch S_1 oder S_2;
$n = 7$; $d = 1$; $r = 3$; $h_4 = 1$.[2])

[1]) Gleichung (34).
[2]) Gleichung (35).

8.) *Netzfläche (3,4)* mit *einer sing. Erz. (312)* und *einer sing. Erz. (222)*.
g trifft w_1 und geht durch S_2;
$n = 7;\ r = 1.$

c) g ist Sehne.

9.) *Netzfläche 2,4)*. $n = 6;\ d = 1;\ r = 2;\ h_4 = 2;\ t^2 = 2.$

10.) *Netzfläche (2,4)* mit *einer sing. Erz. (222)*.
g ist Sehne durch S_1 und Kurvenpunkt allg. Lage.
$n = 6;\ r = 1;\ h_4 = 1;\ t^2 = 1.$

11.) *Netzfläche (1,2)*. $n = 3;\ t^1 = 2.$[1])
g ist die Gerade v.

d) g ist Sekante und liegt in einer Schmiegebene.

12.) *Netzfläche (3,3)*. $n = 6;\ d = 2,\ r = 2;\ h_4 = 2;\ t^2 = 2.$[2])
Unterfall: g trifft v; die beiden Doppelerzeugenden schneiden sich im Punkt (g, v).

13.) *Netzfläche (3,3)* mit *einer sing. Erzeugenden (312)*.
g *trifft* w_1 oder w_2;
$n = 6;\ d = 1;\ h_4 = 1;\ t^2 = 2.$

e) g ist Trisekante.

14.) *Netzfläche (1,4)*. $n = 5;\ h_4 = 2;\ t^2 = 3.$

II. Parabolische Netzflächen.

a) g ist Komplexstrahl allgemeiner Lage.

1.) *Netzfläche [4,0]*. $n = 8;\ d = 3;\ r = 6;\ h_4 = 2.$[3])
Hierzu treten dieselben beiden Unterfälle 1α) und 1β), wie in Ia 1).

---

[1]) Gleichung (37).
[2]) Gleichung (48).
[3]) Gleichung aus (33) für $c_3 = 2c_6$.

2.) *Netzfläche [4,0]* mit *einer sing. Erz. (312).*
g trifft w_1 oder w_2;
$n = 8$; $d = 2$; $r = 4$; $h_4 = 1$.
Hierzu treten dieselben beiden Unterfälle 2α) und 2β) wie in Ia 2).

3.) *Netzfläche [4,0]* mit *zwei sing. Erzeug. (312).*
g trifft w_1 und w_2;
$n = 8$; $d = 1$; $r = 2$.[1])

b) g ist Schmiegungsstrahl.

4.) *Netzfläche [3,0].* $n = 6$; $d = 1$; $r = 3$; $h_4 = 2$; $t^1 = 1$.

5.) *Netzfläche [3,0]* mit *einer sing. Erz. (312).*
g trifft w_1 oder w_2;
$n = 6$; $r = 1$; $h_4 = 1$; $t^1 = 1$.

6.) *Netzfläche [3,0]* mit *einer sing. Erz. (213).*
g geht durch S_1 oder S_2;
$n = 6$; $d = 1$; $r = 2$; $h_4 = 1$.[2])

7.) *Netzfläche [3,0]* mit *einer sing. Erz. (312)* und *einer sing. Erz. (213).*
g trifft w_1 und geht durch S_2 (oder w_2, S_1);
$n = 6$.

c) g ist Hauptsehne.

8.) *Netzfläche [2,0].* $n = 4$; $d = 1$; $h_4 = 2$; $t^1 = 2$.[3])

d) g ist Tangente.

9.) *Netzfläche [2,1].* $n = 5$; $r = 2$; $h_4 = 2$.
g ist selbst Erzeugende der Fläche.

---

[1]) Gleichung aus (34) für $c_3 = 2c_6$.
[2]) Gleichung (38).
[3]) Gleichung aus (48) für $\varphi_1 : \varphi_2 = 0 : 1$.

e) g ist stationäre Tangente.

10.) *Netzfläche [1,2].* $n = 4$; $h_4 = 1$.[1])

g ist selbst Rückkehrerzeugende der Fläche.

---

[1]) Gleichung (39).

Lebenslauf.

Ich, Paul Moor, bin geboren am 27. Juli 1899 als Sohn des Jakob Moor-Laub, Angestellten der S. B. B. zu Basel. Ich besuchte die Primarschule, Untere und Obere Realschule meiner Vaterstadt und bestand im Herbst 1918 die Maturitätsprüfung. Hierauf wandte ich mich dem Studium von Mathematik und Naturwissenschaften zu, war vom Juli 1920 bis August 1922 Assistent der astronomischen Anstalt der Universität Basel, und bestand im Juni 1922 das Oberlehrerexamen in den Fächern Mathematik, Physik, Geographie und Pädagogik. Im Winter 1922/23 studierte ich an der Universität Hamburg und seit Frühjahr 1923 wieder in Basel.

Ich besuchte Vorlesungen und Übungen der folgenden Herren Dozenten:

In Basel: O. Braun, R. Flatt, P. Häberlin, A. Hagenbach, H. Hassinger, K. Joël, W. Matthies, H. Mohrmann, Th. Niethammer, O. Spiess, H. Zickendraht;

in Hamburg: W. Blaschke, E. Hecke, R. Schorr, A. Schwassmann.